Test d'Hypothèse

Objectif :
On veut porter un jugement sur une hypothèse statistique relative à la valeur particulière d'un paramètre d'une population spécifique. Ce jugement est basé sur les résultats d'un échantillon prélevé dans cette population et d'un certain risque d'erreur que nous acceptons de courir.

Principe :
La construction d'un test d'hypothèse consiste effectivement à déterminer entre quelles valeurs peut varier la statistique (ou l'écart réduit) en supposant l'hypothèse vraie, sur la seule considération du hasard de l'échantillonnage.

Exemple : Vérification de la durée moyenne de la semaine de travail de dirigeants de PME.
Selon l'enquête, la durée moyenne de la semaine de travail de ces dirigeants est de 54 heures. On aimerait vérifier cette affirmation au près d'un échantillon aléatoire de dirigeants de PME en Tunisie.
En supposant que le traitement des résultats de l'échantillon donne une valeur moyenne de 51 heures comme semaine de travail, peut-on considérer que l'écart entre les deux résultats (l'écart 54-51= 3 heures) est uniquement imputable à l'hasard de l'échantillonnage ?
Cette approche repose sur deux notions importantes celle **d'hypothèse statistique** et celle de **seuil de signification**.

1) Hypothèse Statistique :

Soit l'hypothèse nulle que nous notons H_0 :
$H_0 : \mu = \mu_0$ (ex : la durée moyenne de la semaine de travail est de 54 heures) et soit la contre-hypothèse (ou hypothèse alternative) que nous notons H_1 :
$H_1 : \mu \neq \mu_0$ (ex : la durée moyenne de la semaine de travail n'est pas de 54 heures). C'est le cas d'un test bilatéral.
Remarque : Si $H_1 : \mu > \mu_0$ ou $H_1 : \mu < \mu_0$ on est dans un cas de test unilatéral à droite ou unilatéral à gauche respectivement. Les résultats de l'échantillon vont nous permettre de rejeter ou de ne pas rejeter H_0.

2) Seuil de signification d'un test d'hypothèse :

Le risque consenti à l'avance, que nous notons α, est de rejeter à tort l'hypothèse nulle H_0 alors qu'elle est vraie (et de favoriser alors l'hypothèse alternative H_1). La quantité α s'appelle le seuil de signification du test et s'énonce en probabilité comme suit :

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{ rejeter } H_0/H_0 \text{ est vraie}).$$

A ce seuil de signification on fait correspondre une région de rejet de l'hypothèse nulle (appelée région critique). L'aire de cette région correspond à la probabilité α.

Exemple : Si $\alpha = 0.05$, cela signifie que l'on admet que la statistique peut prendre dans 5% des cas une valeur se situant dans la région de rejet bien que l'hypothèse H_0 soit vérifiée.

Il y a aussi une région complémentaire dite région de non rejet de H_0 appelée région d'acceptation de probabilité $1 - \alpha$.

Dans un test d'hypothèse on ne peut jamais être certain que l'hypothèse nulle doit être rejetée ou non. Les risques de se tromper sont résumés dans le tableau suivant :

	Ne pas rejeter H_0	**Rejeter H_0**
H_0 **est vraie**	Bonne décision	Mauvaise décision Erreur de type I $\alpha = \mathbb{P}$(commettre cette erreur) $\alpha =$risque de première espèce
H_0 **est fausse**	Mauvaise décision Erreur de type II $\beta = \mathbb{P}$(commettre cette erreur) $\beta =$risque de deuxième espèce	Bonne décision

Nous définissons les risques de première espèce et de deuxième espèce comme suit :

Risque de première espèce : Le risque de rejeter à tort l'hypothèse H_0 et de favoriser l'hypothèse alternative H_1 s'appelle risque de première espèce ou seuil de signification du test. Ce risque noté α est fixé à l'avance (avant de recueillir les données).

Risque de deuxième espèce : Le risque de ne pas rejeter H_0 alors qu'elle est fausse s'appelle risque deuxième espèce et est noté β.

3) Test sur une moyenne :

Généralement, quand on est amené à comparer une moyenne μ à une norme μ_0, on est confronté à trois cas (selon la taille de l'échantillon et le fait de connaître ou pas la variance de celui-ci) :

<u>1^{er} cas :</u>

Grand échantillon $(n > 30)$ prélevé au hasard dans une population de variance connue σ^2 dans ce cas $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit approximativement la loi normale centrée réduite.

Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = \mu_0$

Contre-hypothèses	**Règles de décision du test**
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_{\alpha/2}$ ou $Z < -z_{\alpha/2}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_{\alpha}$
$H_1 : \mu < \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z < -z_{\alpha}$

$2^{\text{ème}}$ cas :

Grand échantillon $(n > 30)$ prélevé au hasard dans une population suivant la loi normale de variance inconnue dans ce cas $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit approximativement la loi normale centrée réduite et $s^2 = \frac{\sum (X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}$.

Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = \mu_0$

Contre-hypothèses	**Règles de décision du test**
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_{\alpha/2}$ ou $Z < -z_{\alpha/2}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_\alpha$
$H_1 : \mu < \mu_0$	Rejeter H_0 si $Z < -z_\alpha$

$3^{\text{ème}}$ cas :

Echantillon de petite taille $(n < 30)$ prélevé au hasard dans une population suivant la loi normale de variance inconnue dans ce cas l'écart réduit $T = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit la loi de Student à $(n-1)$ degrés de liberté.

Hypothèse nulle : $H_0 : \mu = \mu_0$

Contre-hypothèses	**Règles de décision du test**
$H_1 : \mu \neq \mu_0$	Rejeter H_0 si $T > t_{\alpha/2;n-1}$ ou $T < -t_{\alpha/2;n-1}$
$H_1 : \mu > \mu_0$	Rejeter H_0 si $T > t_{\alpha;n-1}$
$H_1 : \mu < \mu_0$	Rejeter H_0 si $T < -t_{\alpha;n-1}$

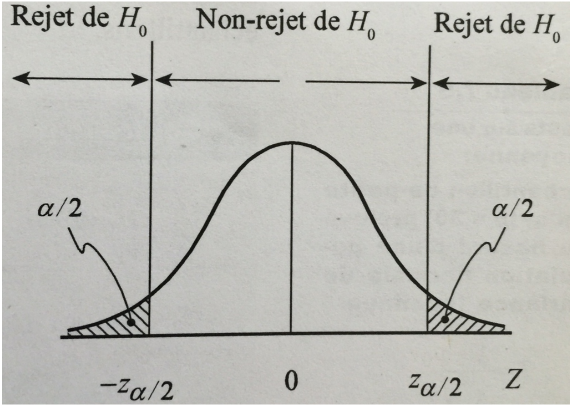

FIGURE – *Zones de rejet et de non-rejet*

Exemple : D'après une société conseil, le salaire annuel moyen d'administrateur de banques de données serait de 49738 Euros. Une enquête effectuée auprès d'un organisme sur un échantillon aléatoire de 36 entreprises de ce secteur donne les résultats suivants concernant la rémunération des administrateurs de banque de données :

Salaire moyen : 50200 Euros

Ecart type : 1560 Euros

Est-ce que les résultats de cette enquête permettraient de supporter l'affirmation de cette société conseil ? Utiliser un seuil de signification de $\alpha = 0.05$

1- Hypothèse Statistique :

$H_0 : \mu = 49738$

$H_1 : \mu \neq 49738$

2- Seuil de signification :

$\alpha = 0.05$

3- Condition d'application du test :

Grand échantillon $(n \geq 30)$ provenant d'une population de variance connue.

4- La statistique :

La statistique qui convient pour le test est $\bar{X}_n$ l'écart réduit est $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ où $\mu_0 = 49738$ et Z suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

5- Règle de décision :

D'après H_1 et au seuil $\alpha = 0.05$ les valeurs critiques de l'écart réduit sont $z_{\alpha/2} = 1.96$ et $-z_{\alpha/2} = -1.96$ (test bilatéral).

On adoptera la règle de décision suivante :

Rejeter H_0 si $Z > 1.96$ ou $Z < -1.96$, sinon ne pas rejeter H_0.

6- Calcul de l'écart réduit :

Puisque $\bar{X}_n = 50200$, $\sigma = 1560$ et $n = 36$, donc :

$Z = \sqrt{36}\frac{50200-49738}{1560} = 462/260 = 1.77$

7- Décision et conclusion :

La valeur de $Z = 1.77$ se situe dans la région de non-rejet de H_0 donc on ne peut rejeter l'affirmation de la société conseil. L'écart observé entre $\bar{X}_n$ et μ_0 soit (50200- 49738= 462), n'est pas statistiquement significatif au seuil $\alpha = 0.05$.

4) Test sur une variance

On se propose de tester si la variance σ^2 d'éléments d'une population gaussienne peut être considérée ou non comme égale à une valeur hypothétique σ_0^2.

La statistique associée à ce test est notée $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ et est distribuée selon la loi du χ^2 avec $n-1$ degrés de libérté.

Le tableau suivant résume dans le cas d'un test sur une variance les règles de décision selon les hypothèses H_1 pour le seuil de signification α.

Hypothèse nulle : $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

Contre-hypothèses	**Règles de décision du test**
$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	Rejeter H_0 si $\chi^2 > \chi^2_{\alpha/2;n-1}$ ou $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha/2;n-1}$
$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	Rejeter H_0 si $\chi^2 > \chi^2_{\alpha;n-1}$
$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	Rejeter H_0 si $\chi^2 < \chi^2_{1-\alpha;n-1}$

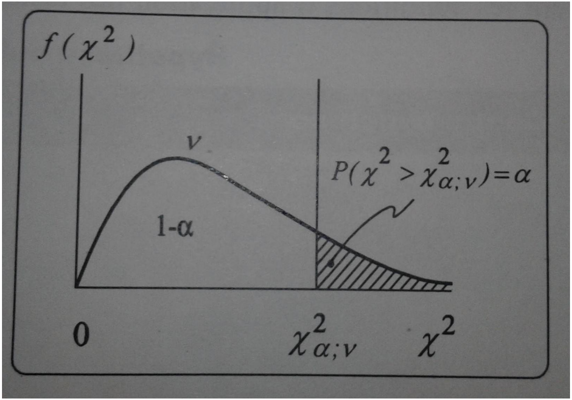

FIGURE – *Zones de rejet et de non-rejet*

Exemple : Selon la responsable de l'application de tests d'évaluation de l'entreprise PMX, la variabilité des résultats aux tests de dextérité n'excède pas 144 ($\sigma = 12$).
Les résultats à ce test obtenus par un échantillon aléatoire de 20 employés donnent une somme de carrés des écarts par rapport à la moyenne de 2952. On suppose que l'échantillon aléatoire provient d'une population normale.
L'hypothèse selon laquelle σ^2 n'excède pas 144 est-elle acceptable au seuil de signification $\alpha = 0.05$?
Effectuer le test selon la démarche usuelle (7 étapes).

1- Hypothèse Statistique :

$H_0 : \sigma^2 = 144$

$H_1 : \sigma^2 > 144$

2- Seuil de signification :

$\alpha = 0.05$

3- Condition d'application du test :

Echantillon aléatoire provenant d'une population normale.

4- La statistique :

La statistique qui convient pour le test en supposant H_0 vraie est $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ où $\sigma_0^2 = 144$. La quantité χ^2 est distibuée selon la loi de khi-deux à 19 $(20 - 1)$ degrés de liberté.

5- Règle de décision :

D'après H_1 et au seuil $\alpha = 0.05$ la valeur critique de χ^2 est $\chi^2_{0.05;19} = 30.1435$ (test unilatéral à droite).

On adoptera la règle de décision suivante :

Rejeter H_0 si $\chi^2 > 30.1435$, sinon ne pas rejeter H_0.

6- Calcul de l'écart réduit :

On a $\sum(X_i - \bar{X}_n)^2 = (n-1)s^2 = 2952$, $n = 20$ et $\sigma_0^2 = 144$.

Le calcul de χ^2 donne : $\chi^2 = \frac{2952}{144} = 20.5$.

7- Décision et conclusion :

Puisque $\chi^2 = 20.5 < 30.1435$, on ne peut rejeter H_0. La dispersion des résultats au test de dextérité semble correspondre à la norme requise. Au risque de se tromper 5 fois sur 100, il n'est pas invraisemblable d'observer une variance de $2952/19 = 155.37$ dans un échantillon de taille $n = 20$ lorsqu'on admet que la variance de la population est 144.

Cette valeur expérimentale ne permet pas d'écarter l'hypothèse selon laquelle $\sigma^2 = 144$.

5) Test sur une proportion :

On se propose de tester si la proportion p d'éléments de la population présentant un certain caractère qualitatif peut être considéré ou non comme égale à une valeur hypothétique p_0.

Hypothèse nulle : $H_0 : p = p_0$

Hypothèse alternative : $H_1 : p \neq p_0 \quad (p > p_0$ ou $p < p_0)$

Soit un échantillon de grande taille $(n > 30)$ prélevé au hasard d'une population binomiale de sorte que $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ dans ce cas l'écart réduit $Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ est distribué selon la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Le tableau suivant résume dans le cas d'un test sur une proportion les règles de décision selon les hypothèses H_1 pour le seuil de signification α.

Hypothèse nulle : $H_0 : p = p_0$

Contre-hypothèses	**Règles de décision du test**
$H_1 : p \neq p_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_{\alpha/2}$ ou $Z < -z_{\alpha/2}$
$H_1 : p > p_0$	Rejeter H_0 si $Z > z_\alpha$
$H_1 : p < p_0$	Rejeter H_0 si $Z < -z_\alpha$

Exemple : Un cadre d'une société conseil affirme que 36% des entreprises ont reçu des commandes par internet. Une enquête sur le commerce électronique par les entreprises indique que sur un échantillon de 256 entreprises 96 font du commerce électronique. Peut-on considérer, au seuil de signification de 5% que l'affirmation du conseiller est vraisemblable ?

1- Hypothèse Statistique :

$H_0 : p = 0.36$

$H_1 : p \neq 0.36$

2- Seuil de signification :

$\alpha = 0.05$

3- Condition d'application du test :

$np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$ et $n > 30$.

4- La statistique :

La statistique qui convient pour le test est $\hat{p}$ l'écart réduit est $Z = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ où $p_0 = 0.36$ et Z suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

5- Règle de décision :

D'après H_1 et au seuil $\alpha = 0.05$ les valeurs critiques de l'écart réduit sont $z_{\alpha/2} = 1.96$ et $-z_{\alpha/2} = -1.96$ (test bilatéral).

On adoptera la règle de décision suivante :

Rejeter H_0 si $Z > 1.96$ ou $Z < -1.96$ sinon ne pas rejeter H_0.

6- Calcul de l'écart réduit :

$\hat{p} = 96/256 = 0,375$ et $Z = \frac{0.375-0.36}{\sqrt{\frac{0.36(0.64)}{256}}} = 0.5$

7- Décision et conclusion :

Puisque la valeur prise par Z est 0.5 et que $-1.96 < 0.5 < 1.96$ on ne peut rejeter l'hypothèse nulle H_0 , donc l'affirmation du conseiller est vraisemblable au seuil de signification de $\alpha = 5\%$.